Dimension:

Def 3.1.11 Ein Vektorraum heißt endlich-Dimensional, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ endlich-dim
- $\mathbb{R}[x]$ – Polynome: Nicht endlich dimensional. (Austauschlemma/Einschmuggellemma)

Lemma 3.1.12: V ein endl. dim K-VR.
- $(u_1, \dots, u_m)$ – l.u. Vektoren
- $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ – Erzeugendensystem.

Dann gibt es paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_m \leq n$ derart, dass wenn man in $\mathcal{W}$ u_1 für $w_{i_1}, \dots, u_m$ für w_{i_m} einschmuggelt, wieder ein Erz.system von V erhält. Nummeriert man $\mathcal{W}$ um, so dass $i_1 = 1, \dots, i_m = m$, so bedeutet das, dass $\mathcal{W}' = (u_1, \dots, u_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$ Erz.syst. von V ist.

Insb: $m \leq n$.

Bew: Wir verwenden die Einschmuggel Idee aus 2. Bew 1.1.12.

$$u_1 = \sum \lambda_i w_i$$

und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Indem wir $w_1, \dots, w_n$ wenn nötig umnummerieren, können wir $\lambda_1 \neq 0$ annehmen.

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left(u_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i w_i\right).$$

Also $w_1 \in \langle u_1, w_2, \dots, w_n \rangle$

Also $\langle u_1, w_2, \dots, w_n \rangle = V$ nach 1.1.9.

Angenommen, wir haben schon die ersten k u's eingeschmuggelt, so dass   Für $k<m$

$$\langle u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n \rangle = V.$$

Dann können wir auch u_{k+1} einschmuggeln:

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i w_i$$

Falls alle $\xi_i = 0$, so $u_{k+1} \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ $\lightning$ l.u.

Also ist (nach Umnummerierung) $\xi_{k+1} \neq 0$, (also $n \geq k+1$

also
$$w_{k+1} = \frac{1}{\xi_{k+1}} \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i - \sum_{i=k+2}^{n} \xi_i w_i \right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle u_1, \dots, u_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n \rangle = V.$$

$\Rightarrow$ Wir können nach und nach alle u_i einschmuggeln, und immer gegen ein w austauschen
$\Rightarrow m \leq n.$ $\square$

<u>Theorem 3.1.13</u>: Je zwei Basen eines Vektorraums haben dieselbe Größe.

<u>Bew</u>: Falls V nicht endlichdimensional, so gibt es kein endl. Erzeugendensystem, alle Basen sind also unendlich.

Falls V endl. dim, sei $(w_1,\dots,w_n)$ ein Erz.syst. von V, und B_1, B_2 Basen.

Aus 3.1.12 $\Rightarrow$ $|B_1|, |B_2| \le n$, jede Basis ist also endl.

Außerdem: B_1 l.u., B_2 Erz. $\xRightarrow{3.1.12}$ $|B_1| \le |B_2|$.

Aber auch $|B_2| \le |B_1|$ mit vertauschten Rollen.

$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$. □

Def 3.1.14: Dimension eines VR, (dim V) ist die Größe einer (und damit jeder) Basis von V.

Korollar 3.1.15: Es sei $\dim(V) = n$, und $(u_1,\dots,u_n)$ l.u. Dann ist $(u_1,\dots,u_n)$ eine Basis.

Insb: U UVR von V $\Rightarrow \dim(U) \le \dim(V)$.

Bew: Es sei $(w_1,\dots,w_n)$ Erz.sys. von V.

Einschiebungssatz $\Rightarrow$ $(u_1,\dots,u_n)$ Erz. von V. □

Korollar 3.1.16: Es sei $U \subseteq V$ UVR. Dann $\dim(U) \le \dim(V)$.

Es sei $(u_1,\dots,u_n)$ Basis von U, $(v_1,\dots,v_m)$ Basis von V.

Dann ist $(u_1,\dots,u_n)$ l.u., $(v_1,\dots,v_m)$ Erzeugend

$\Rightarrow n \le m$ nach 3.1.12 □